

# Punts de trobada entre la física i l'estadística: casos pràctics

Daniel Campos

Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Física, 08193 Bellaterra Barcelona,  
daniel.campos@uab.cat

*Hi ha molts conceptes del món de la probabilitat o l'estadística amb què els alumnes de física no es troben prou familiaritzats, ja que aquests conceptes només s'imparteixen de forma esbiaixada per tal de cobrir necessitats puntuals d'assignatures de la carrera. Per tal de permetre els alumnes consolidar aquest tipus de conceptes més enllà de la teoria existeixen avui dia nombroses eines informàtiques al nostre abast. En aquest article proposem alguns procediments experimentals i de programació per tal que els alumnes treballin conceptes relacionats amb l'anàlisi de sèries o senyals temporals, un camp d'enorme utilitat i aplicabilitat en qualsevol àrea de la física. L'activitat que es descriu aquí pretén que l'alumne cossi el potencial d'aquest tipus d'anàlisi, i pot fer-se servir tant com a una pràctica introductòria als fonaments d'estadística com per a una assignatura de mètodes informàtics, ja que també permet treballar diferents fonaments de càlcul numèric.*

## 1 Introducció

Els sons que sentim enmig d'un bosc en passejar-hi a primera hora del matí, la radiació incident que rep del Sol un punt concret de la superfície terrestre, el nombre de contagis de malària esdevinguts cada dia en tot el món, els índexs borsaris que determinen l'evolució de l'economia, etc. Tots aquests fenòmens i molts altres que aparentment no tenen cap connexió entre ells, tenen en canvi la característica comuna que poden ser descrits matemàticament mitjançant sèries temporals. A més, tots ells comparteixen la propietat que són fenòmens en menor o major grau difícils de predir, per la qual cosa la seva descripció implica a la pràctica un enfocament estadístic o probabilista.

No ens hem d'estranyar d'aquest fet, ja que enfront del caràcter determinista de la física (i la ciència, en general) clàssica prèvia al segle XX, les últimes dècades han estat testimoni de l'emergiment de nombroses teories basades en el concepte d'aleatorietat (el caràcter probabilístic de la física quàntica n'és l'exemple més fonamental). L'estudiant de física, tot i que no necessita entendre conceptes avançats d'estadística (com ara els que es fan servir en els bancs d'inversions per fer prediccions a la borsa) sí que ha de conèixer alguns conceptes fonamentals relacionats amb l'estudi de sèries estadístiques com ara els de correlació, anàlisi espectral... per tal de poder aplicar-los a les diferents àrees de coneixement físic. L'alumne mig coneix de manera aproximada el significat d'aquests conceptes, però en molts casos aquest coneixement es limita a una sèrie de definicions que amb freqüència no li permeten relacionar els conceptes. A més, els alumnes no acostumen a tenir la possibilitat de treballar aquests conceptes per si mateixos més enllà d'alguns problemes formals a l'aula.

De la mateixa manera que el laboratori de física general permet a l'estudiant posar a prova el funcionament de

les lleis físiques i (encara més important) establir-ne les limitacions pràctiques, l'estudi pràctic dels conceptes de les matemàtiques i l'estadística poden permetre-li assolir-ne un grau de coneixement molt més profund. A continuació mostrem algunes possibles idees per tal que els estudiants s'iniciïn en l'anàlisi de sèries temporals alhora que aprenen a connectar fenòmens físics i estadístics. La idea de partida és la de poder enregistrar digitalment sèries temporals de diferents fenòmens d'interès físic i utilitzar el càlcul numèric per tal d'extreure'n les propietats estadístiques bàsiques.

*Cas 1. Anàlisi de sèries periòdiques.* Hi ha molts fenòmens de la nostra vida quotidiana que ens permeten obtenir sèries temporals periòdiques per treballar-ne les característiques. Una opció podria ser la d'enregistrar els batecs del nostre cor o el nostre pols fent servir els pulsòmetres o aparells similars que, pensats sobretot per a esportistes, es poden trobar disponibles avui dia comercialment i que permeten el pas del senyal a l'ordinador. També podem fer servir sèries meteorològiques obtingudes de manera similar amb una estació digital...

En el nostre cas, hem escollit un exemple clàssic com és el de fer servir instruments musicals per obtenir-ne sons (notes) de freqüències determinades. Evidentment existeixen molts programes informàtics d'edició de so que permeten enregistrar l'instrument i visualitzar l'anàlisi de freqüències, entre altres propietats. De cara als nostres estudiants, però, resulta molt més didàctic demanar que ells mateixos dissenyin un programa (en llenguatge C, per exemple) capaç de fer aquesta tasca. Per a això només cal trobar un programa d'edició que ens permeti guardar les dades de so enregistrades en format text (txt, ascii, o similar). Nosaltres hem fet servir el programari Goldwave v5.67, que permet aquesta opció i pel qual existeix una versió de prova gratuïta a través de la xarxa (<http://www.goldwave.com/>).

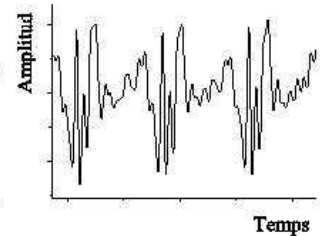
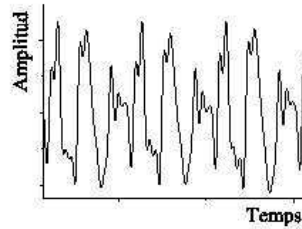
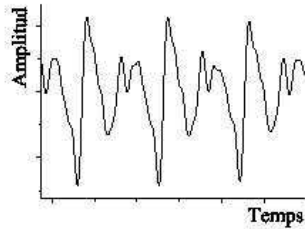
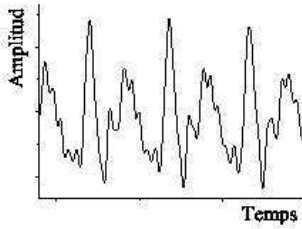


Figura 1: Amplitud del so de diferents instruments musicals (tots ells digitals) en funció del temps. La imatge està ampliada (l'eix horitzontal mostra la seqüència observada aproximadament durant una centèsima de segon) per tal d'apreciar la composició del so.

Procedint d'aquesta manera obtindrem un arxiu de text amb una sèrie de  $n$  punts

$$x_1, t_1; x_2, t_2 \dots x_n, t_n \quad (1)$$

que ens donen el valor de l'amplitud del so  $x_i$  en cada instant de temps  $t_i$ ; representant gràficament aquestes dades podem visualitzar la composició del senyal. La figura 1 mostra quatre exemples amb instruments diferents, tots ells corresponents a una nota *do*.

Una primera cosa que podem demanar als estudiants és que estudiïn les correlacions que hi ha en aquest senyal. Això es pot fer dissenyant un algoritme que numèricament ens calculi la funció d'autocorrelació

$$C(\tau) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt. \quad (2)$$

Aquesta funció ens dóna informació de com de correlacionats es troben dos valors del so separats entre ells una distància en el temps  $\tau$  (òbviament, en el cas d'una sèrie discreta de valors la integral l'hauré d'aproximar com un sumatori sobre els  $n$  punts del nostre arxiu). En el cas d'una sèrie periòdica, és lògic esperar que dos punts separats entre ells un temps  $\tau$  igual al període del senyal tindran una correlació positiva forta, ja que es comporten de la mateixa manera, i el mateix succeirà quan  $\tau$  sigui igual a un número enter de vegades el període. Així doncs, la funció d'autocorrelació  $C(\tau)$  per un senyal periòdic també serà una funció periòdica; això és el que trobem numèricament, tal com mostrem a la figura 2.

En segon lloc, atès que sabem que les notes musicals vénen donades per una freqüència característica  $f$  podem fer l'anàlisi en freqüències del so. La forma més habitual de fer-ho és a través de l'espectre o densitat espectral,

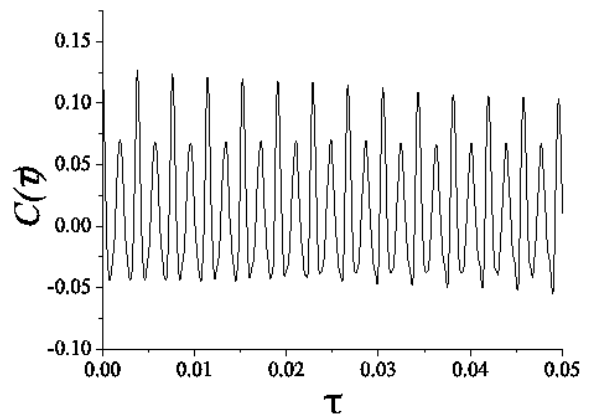


Figura 2: Funció d'autocorrelació obtinguda numèricament per al cas de la nota de piano representada en la figura 1 (esquerra)

definit com

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2 \quad (3)$$

on  $\omega$  és la freqüència angular ( $\omega = 2\pi f$ ) i  $||$  representa el mòdul d'un número complex. Quan un calcula numèricament el valor d'aquesta funció per a valors de  $\omega$  entre 100 i 10000 s'obté com a resultat la funció de la figura 3. En aquest gràfic hem representat dos casos: un *do* central de piano, que seria el cas de la línia de color negre, i un *do* corresponent a una octava menor (*primera octava*), que és la línia de color vermell. Com pot apreciar-se en els dos casos hi ha un primer pic que determina la freqüència característica predominant, més altres freqüències secundàries degudes a la composició especí-

fica del so (que hem mostrat en la figura 1). En el cas del *do* central aquest pic està situat a  $\omega \approx 1650$  rad/s o, el que és el mateix,  $f \approx 262$  Hz. Això coincideix gairebé a la perfecció amb la freqüència teòrica d'un *do* central de piano, que és  $f = 261,2$  Hz. En el cas de l'altre *do* obtenim  $f = 525$  Hz, que és justament el doble de la freqüència anterior (recordem que hi ha un factor 2 entre les freqüències característiques d'una mateixa nota en dues octaves consecutives).

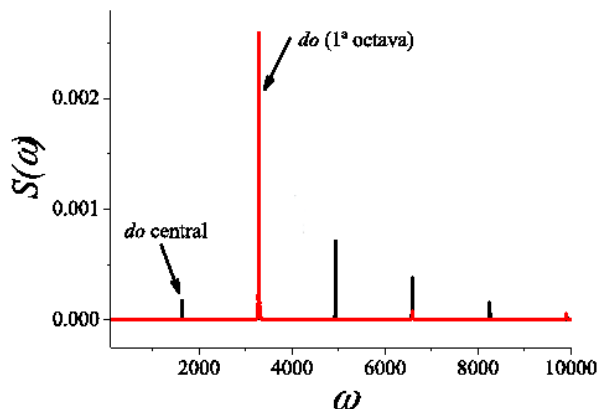


Figura 3: Comparació de l'espectre de freqüències d'un *do* central de piano (línia negra) i d'un *do* de la primera octava (línia vermella)

Finalment podem aprofitar tots els càlculs anteriors per tal de verificar que es compleixi un dels teoremes més importants que existeix en l'anàlisi de senyals estadístics. Es tracta del teorema de Wiener-Khinchine, que diu

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-i\omega\tau} S(\omega) d\omega \quad (4)$$

i la demostració rigorosa del qual podem trobar en qualsevol llibre d'anàlisi de senyals o de teoria de processos estocàstics <sup>1</sup>.

La gran importància d'aquest teorema és que ens diu que hi ha una relació directa entre les correlacions presents en un senyal i la seva representació en freqüències (en concret, l'expressió anterior ens diu que la funció d'autocorrelació és la transformada de Fourier de la densitat espectral). Així doncs, podem deduir les propietats d'una d'aquestes funcions a partir de les de l'altra, procediment aquest que resulta molt pràctic en ocasions on el càlcul de les correlacions no és senzill de fer. Per tant, agafant la funció  $S(\omega)$  obtinguda abans i fent-ne la transformada de Fourier observarem que de nou ens apareix una funció periòdica idèntica a la de la figura 2.

*Cas 2. Decaïment radioactiu.* Un altre fenomen físic la naturalesa estadística del qual és àmpliament coneguda és

el procés de decaïment o desintegració radioactiva. Tots els estudiants saben que aquest decaïment segueix una llei exponencial, però molt sovint no s'emfatitzen prou les implicacions d'aquest comportament. Per tal d'explorar-les enregistrem un senyal radioactiu i en fem l'anàlisi. Tenim diferents opcions per fer-ho; la més senzilla seria disposar directament d'un comptador de radiació (Geiger-Müller) que sigui capaç de digitalitzar el senyal i enviar-lo a un ordinador. Si no disposem de cap aparell d'aquestes característiques, l'alternativa és fer servir un comptador normal de mà (dels que emeten un petit so cada vegada que fan un comptatge), enregistrar aquest so amb un micròfon i analitzar el senyal sonor corresponent tal com hem fet abans per al cas 1. Els resultats que mostrem en aquest article s'han aconseguit duent a terme aquest segon procés.

Com que el senyal sonor no ens permet assolir una resolució temporal massa gran (no és possible distingir dues comptes radioactives molt properes en el temps perquè el soroll de les dues se superposa) solucionem el problema mesurant la radiació ambiental en comptes de fer servir una mostra radioactiva. D'aquesta manera les comptes estaran prou separades (en el cas de l'habitació on hem dut a terme l'experiència la separació mitjana entre comptes per la radiació de fons és de 0,98 segons). Per tal que l'experiment sigui fiable hauríem d'assegurar-nos que totes les comptes provenen d'un únic tipus d'isòtop radioactiu; en cas contrari, trobaríem que la nostra estadística mostra una barreja del comportament de diferents isòtops i l'anàlisi es faria molt més complicat. En general, la radiació ambiental que pot detectar un Geiger-Muller és sobretot radiació gamma que prové (en proporcions diverses depenent del lloc on estem) del K-40 i de les famílies de desintegració del U-238 i el Th-232. Per tant, la hipòtesi que totes les comptes tenen un origen idèntic no es compleix en aquest cas (tot i així veurem que els resultats que obtenim finalment quadren bé amb la teoria). Finalment, cal tenir en compte que per poder disposar d'una sèrie estadística representativa necessitem comptar un número de partícules prou gran. En el nostre cas vam deixar el comptador funcionant una nit sencera (unes 10 hores) de manera que el resultat final va ser una mostra estadística sobre unes 35.000 deteccions. La figura 4 mostra una petita part del senyal mesurat, on s'aprecien els pics de so mesurats pel micròfon per a cada una de les partícules detectades pel Geiger-Muller.

La coneguda com a *llei de desintegració radioactiva* ens diu que el nombre de desintegracions en una mostra radioactiva decau amb el temps de manera exponencial. Suposant que tots els àtoms radioactius de la mostra són idèntics, aleshores es pot demostrar matemàticament <sup>2</sup> que l'única manera de tenir un decaïment exponencial és

<sup>1</sup>C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer, 2004 (3rd Ed)

<sup>2</sup>S.M. Ross. *A First Course in Probability*. Prentice Hall, 2002 (6th Ed)

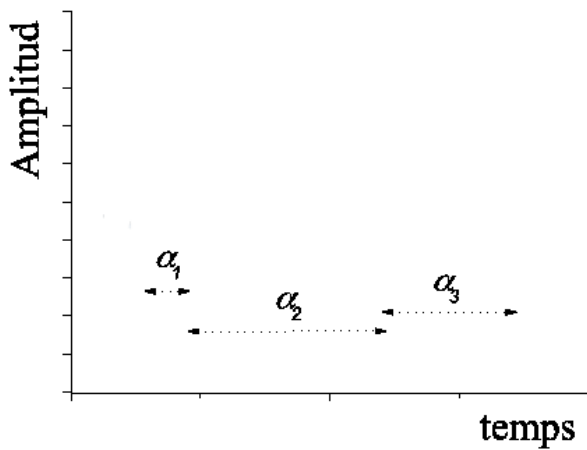


Figura 4: Exemple del senyal obtingut a partir del dispositiu experimental proposat, on s'indiquen els temps de separació  $\alpha_i$  entre deteccions consecutives

que el procés de desintegració sigui totalment independent del temps que fa que mesurem. En llenguatge estadístic, això equival a dir que la desintegració radioactiva és un *procés de Poisson*. Per tal d'entendre millor aquesta afirmació posem un exemple senzill:

«Un amic ens ha assegurat que aquesta tarda vindrà a casa nostra. Són les quatre. Fem una estimació mental i calculem que la probabilitat que l'amic estigui a punt just ara mateix de trucar a la porta és  $p_1$ . Ara suposem que són ja les cinc i ell encara no ha arribat; tornem a estimar la probabilitat que estigui just a punt de trucar, i ens surt  $p_2$ . Ara suposem que arriben les sis i continuem esperant; fem de nou l'estimació que l'amic trucarà ara mateix a la porta, i obtenim una probabilitat  $p_3$ .»

En aquest exemple la lògica ens diu que  $p_3 > p_2 > p_1$  (com més temps ha passat més probable és que l'amic estigui a punt d'arribar). Un procés de Poisson, en canvi, es caracteritza pel fet que  $p_1 = p_2 = p_3$ . És a dir, no importa el temps que fa que esperem, la probabilitat que l'esdeveniment tingui lloc "just ara" és sempre la mateixa. Així és com es comporten les desintegracions radioactives.

La idea, doncs, seria verificar a partir del senyal que hem obtingut amb el Geiger-Muller i el micròfon que el decaïment radioactiu correspon a un procés de Poisson. Com fer-ho? Bàsicament haurem de comprovar que el senyal obtingut satisfà les dues propietats bàsiques d'un procés de Poisson: a) Els temps de separació entre esdeveniments (desintegracions) consecutius segueix una distribució exponencial. b) Els temps de separació entre esdeveniments (desintegracions) consecutius no tenen cap correlació entre ells.

La primera de les dues condicions és senzilla de verificar: mesurem tots els temps entre desintegracions consecutives (marcats com a  $\alpha_i$  a la figura 4) i fem un histo-

grama amb els valors obtinguts. El resultat corresponent es mostra en la figura 5, on s'aprecia que la probabilitat decau efectivament com una exponencial (per verificar-ho mostrem en una cantonada en petit el mateix gràfic en escala semilogarítmica, on s'observa una relació clarament lineal).

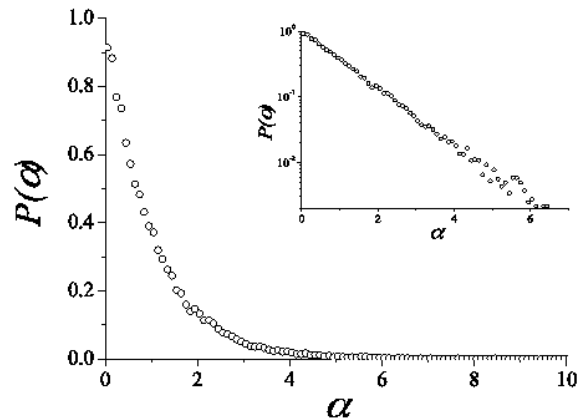


Figura 5: Distribució de probabilitat per als valors del temps de separació entre desintegracions radioactives consecutives

La segona condició implica fer un càlcul de correlacions entre els temps  $\alpha_i$ . Ara fer servir funció d'autocorrelació  $C(\tau)$ , tal com l'hem definit per al cas 1, no és la millor opció de cara a visualitzar correctament els resultats, ja que aquesta funció pot prendre valors arbitràriament grans. En canvi, resulta més útil definir una funció de correlació rescalada de la manera següent:

$$r(\tau) \equiv \frac{C(\tau) - \bar{\alpha}^2}{C(0) - \bar{\alpha}^2}, \quad (5)$$

on l'expressió  $\bar{\alpha}$  representa el valor mitjà sobre tots els intervals  $\alpha_i$ . Procedint d'aquesta manera obtindrem un valor  $r(\tau)$  (habitualment anomenat *coeficient de correlació*) que es troba sempre entre  $-1$  i  $1$ : un valor  $r = 1$  implica correlació positiva,  $r = 0$  implica descorrelació, i  $r = -1$  implica correlació negativa o anticorrelació. La representació gràfica d'aquest coeficient de correlació resulta en el nostre cas (figura 6) resulta ser pràcticament zero per a qualsevol valor de  $\tau$  (excepte, òbviament, per a  $\tau = 0$ , on s'obté un coeficient igual a 1 ja que un valor sempre està perfectament correlacionat amb ell mateix). Així doncs, podem assegurar que els valors dels  $\alpha_i$  estan completament descorrelacionats.

D'aquesta manera hem verificat que la desintegració d'un conjunt de partícules radioactives segueix un procés de Poisson, i així justifiquem la llei de la desintegració radioactiva.

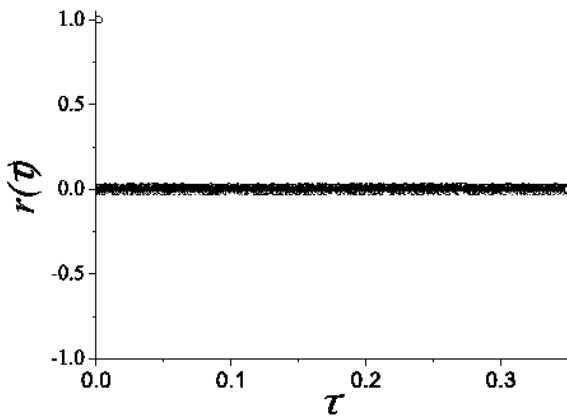


Figura 6: Coeficient de correlació entre els temps de separació entre comptes radioactives

### Bibliografia

- [1] FEYNMAN, R.P. , *There's plenty of room at the bottom*, Annual Meeting of the American Physical Society at the California Institute of Technology (1959).
- [2] BARNES, W.L., DEREUX, A. i EBBESEN T.W., Surface plasmon subwavelength optics , *Nature*, **424**, 824–830 (2003).
- [3] SCHLEGEL, P., EISLER, H.-J., MARTIN, O.J.F., HECHT, B. , POHL, D.W., Resonant Optical Antennas, *Science*, **10(308)**, 1607 – 1609 (2005).
- [4] UTKE, I., HOFFMANN P., i MELNGAILIS, J., Gas-assisted focused electron beam and ion beam processing and fabrication, *Journal of Vacuum Science and Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures*, **26(4)**, 1197–1276 (2008).
- [5] MAIER, S.A., *Plasmonics: fundamentals and applications*, Springer (2007).
- [6] MADOU, M.J., *Fundamentals of microfabrication: the science of miniaturization*, 2nd ed., C.R.C Press (2002).
- [7] GRAELLS, S., ALCUBILLA, R., BADENES, G. i QUIDANT, R., Growth of plasmonic gold nanostructures by electron beam induced deposition, *Applied Physics Letters*, **91**, 121112 (2007).
- [8] GRAELLS, S., AĆIMOVIĆ, S., VOLPE, G. i QUIDANT, R., Direct Growth of Optical Antennas Using E-Beam-Induced Gold Deposition, *Plasmonics*, **5(2)**, 135–139 (2010).